

$$\begin{aligned} Y_1' &= a_{11}Y_1 + b_{12}Y_2 + c_{13}Y_3 + f_1 \\ Y_2' &= a_{21}Y_1 + b_{22}Y_2 + c_{23}Y_3 + f_2 \\ Y_3' &= a_{31}Y_1 + b_{32}Y_2 + c_{33}Y_3 + f_3 \end{aligned}$$

Se forma la matriz A de coeficientes de Y_1, Y_2, Y_3 , quedándonos: $Y' = AY + F$, donde Y' es la matriz columna de las Y_i' , Y es la matriz columna de las Y_i , F la matriz columna de funciones en x . Entonces la solución del sistema será de la forma: $Y = e^{Ax}Y(0) + e^{Ax}C(x)$, donde Y es la matriz columna de las Y_i , $Y(0)$ la matriz columna del valor de la función en el 0, y $C(x)$ será:

$$C(x) = \int_0^x e^{-At} F(t) dt$$

Para calcular e^{At} debemos diagonalizar A por Jordan, $A = PJP^{-1}$, calculando el polinomio característico: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

los autovalores: raíces de $p(\lambda)$

y calcular J, que es una matriz diagonal por bloques formada por los λ_{i0} averiguando el tamaño de los bloques. Para ello:

$$\begin{aligned} p_1 &= \text{rang}(A - \lambda_1 I)^0 - \text{rang}(A - \lambda_1 I)^1 & \text{tamaño } r = p_1 \\ p_2 &= \text{rang}(A - \lambda_1 I)^1 - \text{rang}(A - \lambda_1 I)^2 & \text{tamaño } r-1 = p_2 - p_1 \\ p_3 &= \text{rang}(A - \lambda_1 I)^2 - \text{rang}(A - \lambda_1 I)^3 & \text{tamaño } r-2 = p_3 - p_2 - p_1 \end{aligned}$$

Para calcular P, la matriz cambio de base, debemos calcular los autovectores asociados a cada autovalor que la forman. Siguiendo el método de la escalera por ejemplo supongamos:

$$\begin{aligned} p_1 &= \text{rang}(A - \lambda_1 I)^0 - \text{rang}(A - \lambda_1 I)^1 = 3-2=1 & \text{tamaño } 3 = p_1 = 1 \\ p_2 &= \text{rang}(A - \lambda_1 I)^1 - \text{rang}(A - \lambda_1 I)^2 = 2-1=1 & \text{tamaño } 2 = p_2 - p_1 = 1-1=0 \\ p_3 &= \text{rang}(A - \lambda_1 I)^2 - \text{rang}(A - \lambda_1 I)^3 = 1-0=1 & \text{tamaño } 1 = p_3 - p_2 - p_1 = 1-1=0 \end{aligned}$$

	$(A - \lambda_1 I)^0 v_0$	$(A - \lambda_1 I)^1 v_1$	v_1
	v_0	v_1	v_1
	$\text{Ker}(A - \lambda_1 I)$	$\text{Ker}(A - \lambda_1 I)^2$	$\text{Ker}(A - \lambda_1 I)^3$

P estará formada por los autovectores de bajada, $v_0, (A - \lambda_1 I)v_1, (A - \lambda_1 I)^2 v_2$, quedándonos $e^{At} = P e^{Jt} P^{-1}$.

¿PROBLEMAS?

109 986 2441

atenaa

estudio personalizado

esta distica

calculo algebra matematicas

Frente al parque Camilo José Cela

Un profesor

Un alumno

así de sencillo!! así de diferente!!

Precios especiales para grupos de amigos

atenaa

estudio personalizado

pi margall, 109/986 24.41.44

Nombre	Forma	Cambio a realizar
Variables separadas	$f(x) dx = g(y) dy$	nada
Variables separables	$f(x)g(y) dx = G(y)dy$	separa x y y
Homogéneas	$y'(x) = f(x,y) / f(x,y) = f(x/y)$	$y = ux, dy = u dx + x du$
Reducibles a homogéneas	$a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2 = 0$ y $a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 = 0$ se cortan en (0,0)	$y = x + h$
	$a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2 = 0$ y $a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 = 0$ son paralelas	$a_1 x^2 + b_1 y = t$
Reducibles a homogéneas	cualquiera que lo acepte	$y = e^t, dy = e^t dt$
Primer orden	$y' + p(x)y = q(x)$	$y = u, y' = u' + u p$
Bernoulli	$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$	$y = uv, y' = u'v + u v'$
x no está en la ecuación	$y' = f(y)$	$y' = p, p dx = f(y)dp$
Lagrange	$y' = f(x, y)$	$y' = p, dx = f(y)dp - dy/p$
Clairaut	$y = x f(y') + g(y')$	$y' = p, dy = p dx$
Riccati	$y' = f(x) + g(x)y + h(x)y^2$	$y' = p$
Exactas	$P(x,y) dx + Q(x,y) dy = 0$ donde $D_x Q(x,y) = D_y P(x,y)$	$y' = y' + \ln y, y' = y' \cdot \ln y$ $f = \int P(x, y) dx + g_1(x)$ $f = \int Q(x, y) dy + g_2(y)$ el f.i. depende de x el f.i. depende de y el f.i. depende de x y y el f.i. depende de x y
Reducibles a exactas. Factor integrante	$P(x,y) dx + Q(x,y) dy = 0$ donde $D_x P(x,y) \neq D_y Q(x,y)$ $M(x,y) = D_x P(x,y) - D_y Q(x,y) = M(x,y)$	el f.i. es $1/(g_1 y + Q)$ si es homogénea el f.i. es $1/(g_2 x + P)$ si es homogénea respecto de x el f.i. es $1/(g_3 x + Q)$ si es homogénea respecto de y el f.i. es $1/(g_4 x + P)$ si es homogénea respecto de x y y
Orden superior	$y'' = f(x)$ $F(x,y,y',y'') = 0$ $F(x,y,y',y'') = 0$ $F(x,y,y',y'') = 0$ $F(x,y,y',y'') = 0$	$y'' = p$ $y'' = p, y' = y', y'' = 0$ $y', dx, dy, dy' = y', y'' = 0$ $y', dx, dy, dy' = y', y'' = 0$ $y', dx, dy, dy' = y', y'' = 0$

Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior. Son de la forma:
 $A y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$
si está igualada a f(x) completa.

La solución de la completa será $Y_0 = Y_{homogénea} + Y_{particular}$, donde Y_0 dependerá de las raíces del polinomio característico $p(t) = t^n + a_{n-1} t^{n-1} + a_{n-2} t^{n-2} + \dots + a_1 t + a_0 = 0$.

Si las raíces de $p(t)$ son reales:

$$Y_0 = e^{r_1 x} [(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{k-1} x^{k-1}) \cos bx + (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_{k-1} x^{k-1}) \sin bx] + C_0 e^{r_1 x} + C_1 x e^{r_1 x} + C_2 x^2 e^{r_1 x} + \dots + C_{n-k} x^{n-k} e^{r_1 x}$$

donde $r_1 = a + bi, r_2 = a - bi$, son raíces de $p(t)$, n su multiplicidad en $p(t)$ menos 1 y C_i constantes de integración. Si las raíces de $p(t)$ son complejas:

$$Y_0 = e^{ax} [(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{k-1} x^{k-1}) \cos bx + (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_{k-1} x^{k-1}) \sin bx] + C_0 e^{ax} + C_1 x e^{ax} + C_2 x^2 e^{ax} + \dots + C_{n-k} x^{n-k} e^{ax}$$

donde $r_1 = a + bi, r_2 = a - bi$, son raíces de $p(t)$, n el número de veces que se repiten en $p(t)$ y A_i, B_i constantes de integración.

Para calcular una solución particular Y_p , podemos hacerlo por dos métodos:

1) **Variación de constantes.** Consiste en suponer que las C_i de Y_0 son funciones de x , es decir:
 $C_i = C_i(x), C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x), \dots, C_n = C_n(x)$

e ir imponiendo las condiciones de que todos los sumandos que contienen C_i al derivar Y_p sucesivas veces vale cero, hasta llegar al orden de nuestra ecuación donde paramos de derivar, sustituirnos en la ecuación inicial e igualamos a f(x).

2) **Coefficientes indeterminados.** Si la función f(x), o cada uno de los sumandos que la componen, es de la forma:

$$f(x) = e^{ax} [P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx]$$

entonces:

$$Y_p = x^h e^{ax} [S_n(x) \cos bx + T_n(x) \sin bx]$$

donde:

$h =$ orden de multiplicidad de $a+bi$ en $p(t)$ (Si no es una raíz de $p(t)$, $h=0$)
 $N = \max(n, m)$ (grado de los polinomios)

Ecuación de Euler. Será de la forma:
 $x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = f(x)$
se realiza la sustitución $x = e^t$, reduciéndola a lineal, donde
 $y' = dy/dx = (dy/dt)(dt/dx) = y' e^{-t}, y'' = d^2y/dx^2 = d^2y/dt^2 - y' e^{-t}$
Si en lugar de tener x^h en la ecuación inicial tenemos sumandos de la forma $(ax+b)^h$ entonces la sustitución será $ax+b = e^t$.

Transformada de Laplace.

$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = f(s)$$

Propiedades:

- $L[af(t) + bf(t)] = aL[f(t)] + bL[f(t)]$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0 \implies L[f(t)] = 0$
- $L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty f(u) du$
- $L[f'(t)] = (-s)^n f(s)$
- $L[f''(t)] = s^2 f(s) - s f(0) - f'(0)$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s f(s)$
- $L\left[\int_0^t f(u) du\right] = \frac{f(s)}{s}$
- $L[e^{at} f(t)] = f(s-a)$
- $L[f(t)] = f(s) \iff G(t) = \begin{cases} f(t-a) & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases} \iff L[G(t)] = e^{-as} f(s)$
- $L[f(at)] = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)$

Función Heaviside o unidad.
 $U(t-a) = \begin{cases} 1 & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases} \implies L[U(t-a)] = e^{-as} L[f(t-a)]$

Función de Filtraje.
 $G(t) = F(t)U(t-a) - U(t-b) = \begin{cases} f(t) & t \in (a,b) \\ 0 & t \notin (a,b) \end{cases} \implies L[G(t)] = e^{-as} L[f(t-a)] - e^{-bs} L[f(t-a)]$

Función δ de Dirac.
 $L[g(x-x_0)] = g(s_0) e^{-s_0 t}$

